-Lycée : Elamel Fouchana -Prof : B. Zouhaier	**DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1**	-Classe : 4éme M -Date : 04/12/2012 -Durée : 3h

Exercice n°1 (3points) : *Cocher la réponse exacte, en justifiant la réponse.*

1. Si $f(x) = \frac{x^{2012}+x-2}{x-1}$ alors $\lim_{x\to 1} f(x)=$

   a) 2012 ; b) 2013 ; c) 2014

2. Si f est une fonction dérivable en 0 telle que f(0) = 0 et f'(0) = 1 alors $\lim_{x\to 0}\frac{f(2\sin x)}{x}=$

   a) 0 ; b) 1 ; c) 2

3. ABCD est un carré direct de centre O et I le milieu de [AB] alors l'isométrie $S_{(AD)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(BC)}$ est :

   a) La symétrie orthogonale d'axe (OI)
   b) La symétrie orthogonale d'axe (AD)
   c) La symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{BA}$ et d'axe (AD)

Exercice n°2 (4points) : Soit $\theta \in]0,\pi[$ et (E_θ) : $z^2-2z-2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

1. a) Montrer que : $1+2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_θ)

2. On donne $f(z) = z^3-4z^2+2(2-i\sin\theta e^{i\theta})z+4i\sin\theta e^{i\theta}$

   a) Calculer f(2)

   b) Montrer que : $f(z) = (z-2)(z^2+bz+c)$ où b et c deux nombres complexes à déterminer

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : f(z)=0

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

   On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives : 2 , $1-e^{i\theta}$ et $1+e^{i\theta}$

   a) Déterminer la forme exponentielle de z_B et z_C
   b) Montrer que : OBAC est un rectangle
   c) Déterminer θ pour que OBAC soit un carré

Exercice n°3(5points) : Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$

I. 1- a) Montrer que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et calculer f'(x)

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Vérifier que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$

2- a) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique $\alpha \in]1 ; 2[$

b) Donner suivant les valeurs de x le signe de f(x) – x

3- Montrer que pour tout $x \geq 1$; on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

II. Soit U la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 \geq 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{U_n}} \end{cases}$

1 - Déterminer la valeur de U_0 pour la quelle U est constante.

Dans la suite on suppose que $U_0 \neq \alpha$

2 - a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq 1$

b) Montrer que U est décroissante

c)Déduire que U est convergente et déterminer sa limite

3 - a)Montrer que pour tout $n \in IN$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

b) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in IN$

c)Retrouver la limite de U

<u>Exercice n°4(5points) :</u> *Dans l'annexe ci-joint, on considère le triangle ABC rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et les deux triangles ACD et ABE isocèles et rectangles en A .*

On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [CD], [AC] et [AD] .

Soit f une isométrie qui envoie A sur D et C sur A

1. *On suppose que f fixe un point*
   a)Montrer que f est une rotation
   b) Donner les éléments caractéristiques de f
   c)Construire le point F = f (B)
   d) Montrer que les points A,C et F sont alignés
2. *Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et g = f o R*
   a)Déterminer g(E)
   b) En faisant des décompositions adéquates de f et R .Déterminer la nature de g
   c)En déduire que AEFD est un parallélogramme
3. *On suppose que f est sans point fixe*
   a)Montrer que f est une symétrie glissante
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de f

<u>Exercice n°5(3points) :</u> *Soit f la fonction définie sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$ et on désigne par (C) Sa courbe représentative dans un repère orthonormé*

1. *Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat*
2. *a)Montrer que f est dérivable sur $]0 ;\frac{\pi}{4}]$ et calculer f'(x)*
   b) Dresser le tableau de variation de f
3. *a)Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $]0 ; \frac{\pi}{4}[$, une solution unique a_n*
   b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante
   c)En déduire que (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

<u>Bon Travail</u>

Nom et prénom :……………………..

Feuille à rendre avec la copie

Annexe